ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ ĐỨC TRỌNG

DẠNG SỐ PHỨC CỦA PHÉP NGHỊCH ĐẢO VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ ĐỨC TRỌNG

DẠNG SỐ PHỨC CỦA PHÉP NGHỊCH ĐẢO VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Việt Cường

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mở đầu

Số phức từ khi ra đời đã thúc đẩy toán học tiến lên và giải quyết được một số vấn đề về khoa học, kỹ thuật. Riêng trong hình học, số phức cũng có những ứng dụng quan trọng. Đối với học sinh bậc THPT thì số phức là một nội dung còn mới mẻ, với thời lượng không nhiều, việc sử dụng số phức như một phương tiện để giải các bài toán Hình học phẳng là một vấn đề khó, đòi hỏi học sinh phải có năng lực giải toán nhất định, biết vận dụng kiến thức đa dạng của toán học. Mặc dù sách giáo khoa Giải tích lớp 12 đã đưa bài tập ứng dụng Số phức vào giải toán hình học phẳng nhưng còn rất ít chỉ mang tính chất giới thiệu. Do vậy, sử dụng công cụ số phức để giải toán hình học là một phương pháp mới.

Trong hình học, phép biến hình là công cụ giải toán quan trọng, các phép biến hình đã được học trong nhà trường phổ thông (phép dời hính, phép đồng dạng, phép vị tự) đều biến đường thẳng thành đường thẳng, đường tròn thành đường tròn. Phép nghịch đảo là phép biến hình thuộc loại khác, nó cũng bảo toàn lớp các đường thẳng và đường tròn nhưng có thể biến một đường thẳng thành đường tròn và ngược lại. Chính đặc trưng đó của phép nghịch đảo được sử dụng rất hiệu quả để giải các bài toán hình học, đặc biệt là các bài toán trong hình học phẳng.

“Dạng số phức của phép nghịch đảo” là cách tiếp cận tạo nên cách nhìn mới về các bài toán giải quyết bằng phép nghịch đảo. Vì vậy tôi đã chọn đề tài “**Dạng số phức của phép nghịch đảo và ứng dụng để giải bài tập hình học phẳng**” để tìm hiểu và nghiên cứu.

Ngoài phân mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo luận văn bao gồm hai chương:

Chương 1: *Một số kiến thức chuẩn bị.*

- Trình bày sơ lược các kiến thức về số phức có liên quan (tích vô hướng và tích lệch, phương trình đường thẳng và đường tròn trong mặt phẳng phức).

- Những kiến thức cơ bản về dạng số phức của phép nghịch đảo (định nghĩa, tính chất, định lý của phép nghịch đảo).

Chương 2: *Ứng dụng dạng số phức của phép nghịch đảo để giải một số bài tập hình học phẳng.*

Các bài tập về dựng hình, quỹ tích, các bài tập tổng hợp chứng minh đẳng thức, chứng minh các đường đi qua điểm cố định, sự tồn tại các đường tiếp xúc và tính ưu việt của phép nghịch đảo trong mặt phẳng phức.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Trần Việt Cường. Tác giả xin bày tỏ sâu sắc tới Thầy đã tận tâm giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả đã nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của Khoa Toán, Phòng Đào tạo và Khoa Sau đại học Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K7Q. Tác giả xin chân thánh cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày sơ lược các kiến thức về số phức có liên quan (tích vô hướng và tích lệch, phương trình đường thẳng và đường tròn trong mặt phẳng phức) và một số kiến thức cơ bản về dạng số phức của phép nghịch đảo (định nghĩa, tính chất, định lí của phép nghịch đảo).

1.1 Phép biến hình trong mặt phẳng

Kí hiệu P là tập hợp các điểm trong mặt phẳng.

Một song ánh $f : P \to P$ từ tập P lên chính nó được gọi là phép biến hình của mặt phẳng.

Điểm $M' = f(M)$ được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình f và điểm M được gọi là tạo ảnh của điểm M' qua phép biến hình f.

Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng P thì hình $H' = f(H) = \{f(M)|M \in H\}$ gọi là ảnh của hình H qua phép biến hình f và H được gọi là tạo ảnh của hình H' qua phép biến hình đó.

Điểm M thuộc mặt phẳng P được gọi là điểm kép trong phép biến hình $f : P \to P$ nếu $f(M) = M$.

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng P được gọi là đường thẳng kép trong phép biến hình $f : P \to P$ nếu $\forall M \in d : f(M) = M$.

Phép biến hình $f : P \to P$ được gọi là phép biến hình đồng nhất nếu $f(M) = M, \forall M \in P$.

Phép biến hình $f : P \to P$ được gọi là có tình chất đối hợp nếu $f^2 = Id_p$.

1.2 Tích vô hướng và tích lệch

1.2.1 Tích vô hướng

Ta đã biết tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}, \vec{v}$ là $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ nếu $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$ và $\vec{u}.\vec{v} = 0$ nếu $\vec{u}$ hoặc $\vec{v}$ bằng $\vec{0}$.

Do đó, nếu $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ có toạ vị z, $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ có toạ vị ω thì:

- Nếu z và ω khác 0, kí hiệu φ và ψ là argumen của z và ω thì ta có:

$$\frac{1}{2}(z\bar{\omega} + \bar{z}\omega) = |z| \,.\, |\omega| \cos(\psi - \varphi) = |z| \,.\, |\omega| \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}).$$

- Nếu z hoặc ω bằng 0 thì ta có $\dfrac{1}{2}(z\bar{\omega} + \bar{z}\omega) = 0$.

Vậy, nếu đặt $\langle z, \omega \rangle = \dfrac{1}{2}(z\bar{\omega} + \bar{z}\omega)$ thì ta luôn có:

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(z\bar{\omega} + \bar{z}\omega) = \langle z, \omega \rangle.$$

Một số tính chất (phép toán) của tích vô hướng:

- Tính chất đối xứng: $\langle z, \omega \rangle = \langle \omega, z \rangle$.
- Tính chất $\mathbb{R}$-song tuyến tính:

$$\left.\begin{aligned} \langle z_1 + z_2, \omega \rangle &= \langle z_1, \omega \rangle + \langle z_2, \omega \rangle \\ \langle kz, \omega \rangle &= k\langle z, \omega \rangle, \;\; k \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{($\mathbb{R}$-Tuyến tính đối với z)}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle z, \omega_1 + \omega_2 \rangle &= \langle z, \omega_1 \rangle + \langle z, \omega_2 \rangle \\ \langle z, k\omega \rangle &= k\langle z, \omega \rangle, \;\; k \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{($\mathbb{R}$-Tuyến tính đối với ω)}$$

- $\langle z, z \rangle = |z|^2$.
- $\langle \lambda z, \omega \rangle = \langle z, \bar{\lambda}\omega \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

1.2.2 Tích lệch

Cho véctơ $\overrightarrow{OM}$ có toạ vị z và véctơ $\overrightarrow{OP}$ có toạ vị ω. Tích lệch của hai véctơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OP}$ là một số thực được xác định bởi:

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right] = [z, \omega] = \frac{i}{2}(z\bar{\omega} - \bar{z}\omega).$$

Nếu z và ω khác 0 thì ta có $[z,\omega] = |z|.|\omega|\sin(\psi - \varphi)$, trong đó φ và ψ là argumen của z và ω. Do đó, ta có $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}\right] = \left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP})$.

Nếu z hoặc ω bằng 0 thì $[z,\omega] = 0$.

Từ đó, ta có:

- Ba điểm O, M, P thẳng hàng tức hai véctơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$ cùng phương khi và chỉ khi $\bar{u}z - u\bar{z} + ip = 0, u \neq 0, p \in \mathbb{R}$.
- Ba điểm O, M, P không thẳng hàng thì $[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}] = [z,\omega]$ bằng hai lần diện tích đại số tam giác định hướng OMP, nó là số thực mà giá trị tuyệt đối là hai lần diện tích tam giác OMP, nó dương khi OMP định hướng thuận (ngược chiều quay kim đồng hồ khi đi dọc chu vi $O \to M \to P \to O$) và nó âm khi OMP định hướng ngược.

Các tính chất của (phép toán) của tích lệch:

- Tính chất phản đối xứng $[\omega, z] = -[z,\omega]$.
- Tính chất $\mathbb{R}$-song tuyến tính.
- Với $\lambda \in \mathbb{C}$ thì $[\lambda z,\omega] = [z,\bar{\lambda}\omega]$.

1.3 Phương trình đường thẳng trong mặt phẳng phức

1.3.1 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng đi qua điểm M_0 có toạ vị z_0 với vectơ chỉ phương $\vec{u}$ có toạ vị u có phương trình: $[z - z_0, u] = 0$ hay $z - z_0 = \dfrac{u}{\bar{u}}(\overline{z - z_0})$.

Mọi đường thẳng có thể xác định bởi phương trình

$$z = \lambda\bar{z} + \delta \text{ với } |\lambda| = 1 \text{ và } \lambda\bar{\delta} + \delta = 0.$$

Nếu đặt $\lambda = \dfrac{u}{\bar{u}}$ $(u \neq 0)$ thì ta có phương trình:

$$z = \frac{u}{\bar{u}}\bar{z} + \delta,\ \langle u, \delta\rangle = 0,$$

trong đó u là toạ vị của một véctơ chỉ phương của đường thẳng, $\frac{\delta}{2}$ là toạ vị của hình chiếu vuông góc của gốc O xuống đường thẳng.

Nếu hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình chính tắc là

$$z = \lambda\bar{z} + \delta \ (|\lambda| = 1, \lambda\bar{\delta} + \delta = 0),$$
$$z = \lambda'\bar{z} + \delta' \ (|\lambda'| = 1, \lambda'\bar{\delta}' + \delta' = 0),$$

thì ta có

- $\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow \lambda = \lambda', \delta = \delta'$.
- $\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \lambda = \lambda', \delta \neq \delta'$ (lúc này khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' bằng $\frac{1}{2}|\delta - \delta'|$).
- $\Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow \lambda + \lambda' = 0$.

1.3.2 Phương trình tổng quát của đường thẳng

Mọi đường thẳng có thể xác định bởi phương trình

$$\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \text{ với } |\alpha| = |\beta| \neq 0 \text{ và } \bar{\alpha}\gamma = \beta\bar{\gamma}.$$

Điểm có toạ vị $z_0 = \frac{-\gamma}{2\alpha}$ là hình chiếu vuông góc của O xuống đường thẳng.
Trường hợp riêng:

- $\bar{u}z - u\bar{z} + ip = 0, u \neq 0, p \in \mathbb{R}$ (u là toạ vị của véctơ chỉ phương của đường thẳng).
- $\bar{v}z - v\bar{z} + p = 0, v \neq 0, p \in \mathbb{R}$ (v là toạ vị của véctơ pháp tuyến của đường thẳng).

1.3.3 Phép chiếu vuông góc xuống đường thẳng Δ

Giả sử điểm H có toạ vị z' là hình chiếu vuông góc của điểm P có toạ vị ω xuống đường thẳng Δ.

Nếu đường thẳng Δ có phương trình $z = \lambda\bar{z} + \delta$ $(|\lambda| = 1, \lambda\bar{\delta} + \delta = 0)$, thì $z' = \frac{1}{2}(\omega + \lambda\bar{\omega} + \delta)$.

Nếu đường thẳng Δ có phương trình

$$\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, (|\alpha| = |\beta| \neq 0, \bar{\alpha}\gamma = \beta\bar{\gamma})$$